

压缩传感理论与重构算法

杨海蓉^{1,2}, 张 成¹, 丁大为¹, 韦穗¹

(1. 安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室, 安徽合肥 230039;
2. 合肥师范学院数学系, 安徽合肥 230061)

摘 要: 压缩传感理论(Compressive Sensing, CS)以远低于 Nyquist 采样频率的非适应性测量和优化方法高概率重构信号. 本文介绍了 CS 的基本理论、重构算法, 包括贪婪、凸优化方法及我们提出的 MBOOMP 算法; 同时, 采用 0-1 组成的随机信号进行性能比较的模拟实验, 结果表明我们的算法优于传统的 OMP 算法.

关键词: 压缩传感; 稀疏表示; 信号恢复; 无线传感网络; 模拟-信息转换

中图分类号: TN911.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 01-0142-07

The Theory of Compressed Sensing and Reconstruction Algorithm

YANG Hai-rong^{1,2}, ZHANG Cheng¹, DING Da-wei¹, WEI Sui¹

(1. Key Laboratory of Intelligent Computing & Signal Processing, Anhui University, Hefei, Anhui 230039, China;
2. Mathematics Department, Hefei Normal University, Hefei, Anhui 230061, China)

Abstract: Compressive sensing, by means of the non-adaptive measurements with a well below the Nyquist frequency and optimization methods, reconstruct signal with high probability. In this paper, we introduce the basic theory of compressed sensing and the main reconstruction algorithms, including iterative algorithms as well as our improved MBOOMP algorithm. Meanwhile, the simulation of random signal which is composed of 0 and 1 are adapted to compare their performance. It is shown that our algorithm is better than typical OMP algorithm.

Key words: compressive sensing; sparse representation; signal recovery; wireless sensor networks; analog-to-information conversion

1 引言

传统的 Shannon/Nyquist 采样定理指出, 带限信号的采样频率必须大于其带宽的两倍才能确保完全重构原始信号. 近几年来, 作为 Shannon/Nyquist 采样定理的另一种选择, 压缩传感(CS)理论备受大家关注. 此理论最初是由 Donoho(美国科学院院士)、E Candes (Ridgelet, Curvelet 创始人)及华裔科学家 T Tao(陶哲轩, 2006 年菲尔茨奖获得者)等人提出, 2006 年 IEEE Transactions on Information Theory 上发表的“Compressed Sensing”^[1]的文章中首次被系统地论述. 该理论一经提出, 在信号处理的多个领域得到高度关注和应用, 并被美国科技评论评为 2007 年度十大科技进展. 且 CS 理论已发展了分布 CS 理论^[2,3](Baron 等提出)、1-BIT CS 理论^[4](Baraniuk 等提出)、Bayesian CS 理论^[5](Carin 等提出)、无限维 CS 理论(Elad 等提出)等, 成为数学领域和工程应用领域的一大研究热点. CS 理论是信号处理领域新近发展的一种新

框架, 它把物理、计算和数值方法有机地结合起来去解决大而复杂的问题. 其随机编码过程非常简单, 仅需要计算非相干投影而不做任何其它的处理, 采用“少采样, 巧计算”的原则, 把技术负担从传感器转移到后台处理器. CS 的研究思想挑战了 Shannon/Nyquist 采样定理的理论极限, 对信号的测量数量远小于传统 Shannon/Nyquist 采样数量, 使宽带信号的处理更加有效. 而 CS 理论精确重建原始信号依赖于两个先验: 信号的稀疏性和测量矩阵与测量基之间的非相干性, 测量矩阵的限制等容条件(Restricted Isometry Property, RIP)^[6]也为精确重建提供了理论保证.

CS 主要思想是对一类具有稀疏先验的信号, 先经小部分非线性采样, 其包含足够信息良好逼近信号, 再通过一定类型的线性或非线性解码机制就可高概率精确重建原始信号(见图 1^[7]), 我们采用稀疏投影矩阵和非常稀疏投影矩阵为测量矩阵, 利用基于 l_1 模最小化模型 $\min \|x\|_{l_1}, s.t. \Phi x = y, N = 4096$, 小汽车图像稀疏

度 $K = 424$, (图像来自计算机视觉图像库 (<http://staff.science.uva.nl/~aloi>)))。



图1 利用稀疏投影矩阵和非常稀疏投影矩阵的小汽车的重建结果

CS 理论的三个组成要素是信号的稀疏变换(目前的稀疏变换有离散余弦变换(DCT),小波(wavelet), curvelet, 过完备原子分解(overcomplete atom decomposition)等);稀疏信号的非相干测量(目前的测量方式为线性测量)及稀疏信号的重建算法.其中,快速稳定的重建算法是将 CS 推向实用化的关键之一,也是 CS 的主要研究内容之一。

2 背景知识

定义 1(稀疏信号) 给定一组基 $\Psi = \{\psi_i\}_{i=1}^N$ (为简单起见,假设 Ψ 为标准正交基),如果信号 x 可以表示成 Ψ 中 K 个基向量的线性组合形式:

$$x = \sum_{n=1}^N a_n \psi_n \text{ (或 } \Psi a) = \sum_{i=1}^K a_{n_i} \psi_{n_i} \quad (1)$$

则称 x 为 K 稀疏信号.其中系数 $a_n = \langle x, \psi_n \rangle = \psi_n^T x$,可见对同一信号而言, x 和 a 是该信号的两种等价描述形式, x 为信号在时间域上的表述, a 为其在 Ψ 变换域上的表述。

事实上,真实和模拟的信号在任何正交基上都未必有精确的稀疏描述,而是在适当选择的基上具有某种可压缩的性质.我们称能用 K 项向量的线性组合良好逼近的信号为可压缩信号;即

$$x \approx x_K = \sum_{n=1}^K a_{(n)} \psi_{(n)} \quad (2)$$

基于上面的概念,所谓的 CS 理论为:在适当选择的基 $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$ 上具有 K 稀疏描述的 N 采样信号 $x \in \mathbb{R}^N$,可通过它在另一组非相干基 $\Phi = (\phi_1^T, \phi_2^T, \dots, \phi_M^T)$ 上的 M ($K \leq M \ll N$) 个线性投影(测量) $y(i) = \langle x, \phi_i^T \rangle, i \in \{1, 2, \dots, M\}$ 获得精确重建.即

$$y = \Phi x = \Phi \Psi a \quad (3)$$

其中, Φ 为测量基, $\Phi \Psi$ 称为传感系统, y 为测量向量,由测量基 Φ 构成的 $M \times N$ 维矩阵为测量矩阵.为方便起见,本文中假设稀疏基 Ψ 由单位向量构成,故我们的目标是通过 M ($M \ll N$) 维测量向量 y 精确重建或者逼近信号 x 。

由条件 $K \leq M \ll N$ 看出 CS 理论主要解决的是欠采样情况下的信号重建问题,信号 x 的恢复本质上是一

个病态的求逆问题.但是,原始信号 x 很强的稀疏性给出了从 M 个测量中重建 x 的希望.事实上,可以通过寻找满足 y 中 M 个测量向量的最稀疏信号,即信号 x 是下列 l_0 最小化问题的解

$$\hat{x} = \arg \min \|x\|_0 \text{ s.t. } y = \Phi x \quad (4)$$

但是,众所周知,解决 l_0 最小化问题是一个 NP-问题^[8].因此,Donoho 在文献^[9]中提出了基于最小化 l_1 模的等价线性优化模型,也就是利用基于线性规划的基追踪(Basis Pursuit, BP)方法求解:

$$\hat{x} = \arg \min \|x\|_1 \text{ s.t. } y = \Phi x \quad (5)$$

其中 Φ 应该满足限制等容条件(RIP)^[6],即

定义 2(限制等容条件) 称一个测量矩阵满足 Φ 具有参数 (K, ϵ) , $\epsilon \in (0, 1)$ 的限制等容条件(RIP),若对所有的 K -稀疏向量,有 $(1 - \epsilon) \|v\|_2 \leq \|\Phi v\|_2 \leq (1 + \epsilon) \|v\|_2$.限制等容条件声明 Φ 的每个 K 列集合近似一个正交系统。

通常,基于线性规划的解码器求解需要 cK 个投影,其中 $c \approx \log_2(1 + N/K)$ ^[7],重建复杂度为 $O(N^3)$ ^[8].Candès 和 Tao^[10]证明了在一个更强(数量)的条件下,稀疏恢复问题等价于问题(4)和(5);即

定理^[10] (限制等容条件下的稀疏恢复).假设测量矩阵 Φ 满足具有参数 $(2n, 0.2)$ 的限制等容条件.则每一个 n -稀疏向量 x (上面表示为 v) 能够作为凸优化问题(6)的唯一解从其测量 Φx 中被精确重建。

3 信号重建的贪婪算法

从背景知识介绍中,我们知道快速稳定的重建算法是将 CS 推向实用化的关键之一.目前重建算法主要地算法包括三类:凸优化方法,贪婪算法和组合算法。

目前文献中提出的凸优化方法有内点方法^[11]、预计梯度法^[2]、以及迭代阈值^[3]、迭代硬阈值(IHT)^[4,6]、基于布雷格曼(Bregman)距离的 Bregman 迭代^[12]等.凸优化方法能够高概率得到信号的精确重建,通过解决一个凸优化问题,用其极小化逼近目标函数。

贪婪算法的主要思想是通过迭代计算 x 的支撑,主要包括匹配追踪(MP)^[9]、正交匹配追踪(OMP)^[13](我们改进的 MBOOMP 算法^[14]),以及正则化的正交匹配追踪(ROMP)^[15]、逐步正交匹配追踪(STOMP)^[16]、压缩采样匹配追踪(CoSaMP)^[17]、子空间追踪(SP)^[18]等。

组合算法要求对信号高度结构化地采样,经由群测试快速恢复支撑.这类算法包括傅立叶采样^[5]、链追踪^[19]、HHS 追踪^[20]以及 Cormode-Muthukrishnan^[14]和 I-wen^[21]的一些算法。

本文中,我们梳理了有关算法,特别是目前使用频率比较高并且有代表性的凸优化算法和贪婪算法,详

细阐述了主要算法的数学框架。

3.1 匹配追踪(MP)与正交匹配追踪(OMP)

我们的目标是从 $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$ 重建最稀疏的 \mathbf{x} , 这两种算法均通过确定 Φ 的哪一列参与测量向量 \mathbf{y} 中来确定 \mathbf{x} 的支撑, 运用贪婪模式去确定每一列. 在每次迭代中, 选择 Φ 中与 \mathbf{y} 的剩余部分最相关的列, 然后从 \mathbf{y} 中抽取该列对 \mathbf{y} 的贡献再对其冗余迭代.

在表 1 至表 7 中, r_t 表示残差, t 表示迭代次数, Λ_t 表示 t 次迭代的索引集合

表 1

MP 重建算法:
(1) 初始化: $r_0 = \mathbf{y}, t = 1$
(2) 找索引 λ_t , 使得: $\lambda_t = \arg \max_{j=1,2,\dots,d} \langle r_{t-1}, \Phi_j \rangle $
(3) 计算新的近似 x_t 和残差 $r_t: x_t = \langle r_{t-1}, \Phi_{\lambda_t} \rangle, r_t = r_{t-1} - x_t$
(4) $t = t + 1$, 如果 $t < K$, 返回第(2)步.

MP 算法由于信号在已选定原子(测量矩阵的列向量)集合上的投影的非正交性使得收敛可能需要经过较多次迭代. 常用的正交匹配追踪算法(OMP)则通过递归地对已选择原子集合进行正交化以保证迭代的最优性, 从而减少了迭代次数.

表 2

OMP 重建算法:
(1) 初始化 $r_0 = \mathbf{y}, \Lambda_0 = \emptyset, t = 1$
(2) 找到索引 λ_t , 使得: $\lambda_t = \arg \max_{j=1,2,\dots,d} \langle r_{t-1}, \Phi_j \rangle $
(3) 令 $\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \cup \{\lambda_t\}$
(4) 计算 $\{\Phi_i: \lambda \in \Lambda_t\}$ 张成空间的正交投影 P_t
(5) 计算新的近似 x_t 和残差 $r_t: x_t = P_t \mathbf{y}, r_t = \mathbf{y} - x_t$
(6) $t = t + 1$, 如果 $t < K$, 返回第(2)步.
(7) 获得的估计 $\hat{\mathbf{x}}_\lambda$ 在索引 Λ_K 位置的元非零, 且在该位置的测量向量逼近为: $\mathbf{x}_K = \sum_{\lambda \in \Lambda_K} \hat{s}_\lambda \Phi_\lambda$

OMP 算法的运行时间是第二步决定, 总的耗费是 $O(KdN)$.

针对 OMP 中原子选择机制相对新的冗余误差的非最优性, 文献[28]中采用 OOMP 的选择准则来代替 OMP 中的选择准则. 但由于 OOMP 算法没有限制迭代次数, 因此一般有 $p \geq m$, 也就是说存在误选原子. 因此我们提出一种新的原子选择机制称为改进的后退型最优 OMP 算法^[14](MBOOMP), 逐步向后剔除多余的原子, 直到剩余原子个数与稀疏度相同为止. (MBOOMP 算法如下:

(1) 初始化 $r_0 = \mathbf{y}$, 记 $\gamma_n = \varphi_n, n = 1, \dots, N$, 取索引 $\lambda_1 = \arg \max_{1 \leq n \leq N} |\langle \varphi_n, \mathbf{y} \rangle|$, 索引集合 $\Lambda_1 = \{\lambda_1\}$, 正交投影函数 $\psi_1 = \varphi_{\lambda_1} = \beta_1$ 和分解系数 $x_1 = \langle \varphi_{\lambda_1}, \mathbf{y} \rangle$, 迭代计数 $t = 1$;

(2) 对 $n = 1, \dots, N$, 分别计算: $\gamma_n = \gamma_n - \psi_t \langle \varphi_n, \mathbf{y} \rangle, b_n = \langle \gamma_n, \mathbf{y} \rangle$

$d_n = d_n - |\langle \varphi_t, \varphi_n \rangle|^2, e_n = |b_n|^2 / d_n$;

(3) 令 $t = t + 1$, 寻找索引 λ_t , 使得 $\lambda_t = \arg \max_{1 \leq n \leq N} e_n$, 记 $\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \cup \{\lambda_t\}$. 记: $\|R_t\|^2 = \|R_{t-1}\|^2 - e_{\lambda_t}, \psi_t = \frac{\gamma_{\lambda_t}}{\sqrt{d_{\lambda_t}}}, \beta_t = \frac{\gamma_{\lambda_t}}{d_{\lambda_t}}$.

(4) 对 $n = 1, \dots, t - 1$ 计算新的投影和分解系数: $\beta_n = \beta_n - \beta_t \langle \varphi_{\lambda_t}, \beta_n \rangle, c_n = c_n - \langle \varphi_{\lambda_t}, \beta_n \rangle c_t$

(5) 重复(2)~(4)直到对于给定的小正数 δ , 满足 $\|\tilde{R}_t\|^2 \leq \delta$ 时, 迭代停止.

(6) 对于 $n = 1, \dots, p$, 我们依次计算 $\tilde{\mathbf{x}} = (\frac{x_1^p}{|\mathbf{x}|}, \frac{x_2^p}{|\mathbf{x}|}, \dots, \frac{x_p^p}{|\mathbf{x}|})^T$, 消除 $\tilde{\mathbf{x}}$ 中 $p - m$ 个最小的系数, 并消除这个系数对应的原子, 从而获得新系数向量 $\tilde{\mathbf{x}}_{new} = (\frac{x_1^p}{|\mathbf{x}|}, \frac{x_2^p}{|\mathbf{x}|}, \dots, \frac{x_m^p}{|\mathbf{x}|})^T$ 和原子集合 $\varphi_{\lambda_j}, j = 1, \dots, m$.

在这几种基本迭代算法中, 每次迭代均只选择与残差最相关的一列, 自然人们会想:“每次迭代是否可以多选几列呢?”基于这种思想, 许多基于 OMP 的迭代方法在近几年被提出.

3.2 正则化的正交匹配追踪(ROMP)

ROMP 结合了贪婪算法的速度、简便和凸优化方法的强力保证. 在具有参数 $(2K, 0.03/\sqrt{\log K})$ 的限制等容条件下, ROMP 能从它的测量 \mathbf{y} 中精确地恢复一个 K -稀疏信号 \mathbf{x} . 特别地, ROMP 的运行时间与 OMP 在理论上是相当的, 但在实际中好于 OMP.

表 3

ROMP 算法:
(1) 初始化 $r_0 = \mathbf{y}, \Lambda = \emptyset$, 迭代 $t = 1$, 重复下面步骤 K 次或者直到 $ \Lambda \geq 2K$;
(2) 鉴定: 计算 $u = \langle r_{t-1}, \Phi_j \rangle$
(3) 选择: K 个最大的非零坐标构成的集合或者它的所有非零坐标, 选两者小的那个, 设为 J .
(4) 正则化: 在所有具有可比较坐标的子集 $J_0 \subset J$ 中: $ u(i) \leq 2 u(j) $, 对 $i, j \in J_0$, 选择具有最大能量 $\ u _{J_0}\ _2$ 的 J_0 .
(5) 更新: 增加 J_0 到指标集:
$\Lambda \leftarrow \Lambda \cup J_0, \mathbf{x} = \arg \min_{z \in \mathcal{K}} \ \mathbf{y} - \Phi z\ _2; r = \mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}$

3.3 子空间追踪(SP)

SP 算法的基本思想是借用具有回溯的顺序编码理论, 在每一次迭代过程中混合一个简单的方法重新估计所有候选者的可信赖性. 对于满足具有一个与 K 独立的固定参数的 RIP 的采样矩阵 Φ , SP 算法能够从它的无噪声测量中精确恢复任意 K -稀疏信号. SP 算法的计算复杂度以 $O(mNK)$ 为上界, 也可能减少到 $O(mN \log K)$. 而且从图 3~5 重建结果中看出, SP 算法兼顾了有效性和复杂度.

表 4

SP 算法:
(1)初始化: $\Lambda = \{ \text{相应 } \Phi^* \mathbf{y} \text{ 绝对值最大的 } K \text{ 个指标} \}$, $\mathbf{y}_r = \text{resid}(\mathbf{y}, \Phi_\Lambda) = \mathbf{y} - \Phi_\Lambda \Phi_\Lambda^\dagger \mathbf{y}$
(2)迭代:若 $\mathbf{y}_r = 0$,退出迭代;否则继续.
(3) $T' = \Lambda \cup \{ \Phi^* \mathbf{y}_r \text{ 绝对值最大的 } K \text{ 个指标} \}$, $x_p' = \Phi_{T'}^\dagger \mathbf{y}$, $\Lambda' = \{ \text{相应 } x_p' \text{ 最大元的 } K \text{ 个指标} \}$, $\tilde{\mathbf{y}}_r = \text{resid}(\mathbf{y}, \Phi_{\Lambda'})$
(4)更新:若 $\ \tilde{\mathbf{y}}_r\ > \ \mathbf{y}_r\ $,退出迭代;否则,设 $\Lambda = \Lambda'$ 以及 $\mathbf{y}_r = \tilde{\mathbf{y}}_r$,继续迭代.
输出:满足 $\hat{\mathbf{x}}_{ 1, \dots, N - \Lambda} = 0$ 以及 $\mathbf{x}_\Lambda = \Phi_\Lambda^\dagger \mathbf{y}$ 的估计信号 $\hat{\mathbf{x}}$

3.4 逐步正交匹配追踪 (STOMP)

STOMP 的目标是从测量向量 \mathbf{y} 中重建实际信号 \mathbf{x} , 得到 \mathbf{x} 的一个逼近解 $\hat{\mathbf{x}}$, 其中测量矩阵 Φ 来自于 USE (Uniform Spherical Ensemble), Φ 的列是单位球上的独立同分布点).

表 5

STOMP 算法:
(1)初始‘解’ $\mathbf{x} = 0$, 初始残差 $r_0 = \mathbf{y}$, 计数器 $t = 1$.
(2)计算 $c_t = \Phi^T r_{t-1} = \langle \Phi, r_{t-1} \rangle$
(3)通过阈值产生“大”坐标的一个集合: $J_t = \{ j: c_t(j) > g\sigma_t \}$, σ_t 是一个噪音水平, g_t 是一个阈值参数.
(4)更新支撑估计: $\Lambda_t = \Lambda_{t-1} \cup J_t$, 在支撑 Λ_t 上得到新的逼近 x_t , 为 $(x_t)_{\Lambda_t} = (\Phi_{\Lambda_t}^\dagger \Phi_{\Lambda_t})^{-1} \Phi_{\Lambda_t}^\dagger \mathbf{y}$, 其中 Φ_{Λ_t} 表示 Φ 中仅取支撑 Λ_t 对应的列构成的新矩阵.
(5)更新残差为: $r_t = \mathbf{y} - \Phi_{\Lambda_t} x_t$
(6)检查终止条件(例如 $s = 10$), 若还没到停止时间, 假设 $t := t + 1$, 转到步骤(2), 若到了停止时间, $\hat{\mathbf{x}}_t = x_t$.

注:规范噪音水平 $\sigma_t = \|\mathbf{r}_t\|_2 / \sqrt{n}$, 典型的阈值参数取值范围为 $2 \leq g_t \leq 3$.

3.5 可压缩采样的匹配追踪 (CoSaMP)

CoSaMP 算法本质上是一种贪婪算法. 它结合了组合算法中的思想以保证速度, 提供了严格的误差界^[22]. 这个分析来源于 ROMP 上的工作以及 Candès-Romberg-Tao 在凸优化方法上的实现保证.

假设测量矩阵 Φ 具有限制等容常数 $\delta_{4s} \leq 0.1$.

表 6

CoSaMP 算法:
(1)初始化: $\mathbf{x} = 0$, $r_0 = \mathbf{y}$, $t = 1$.
(2)计算信号代理: $c = \Phi^T r_{t-1} = \langle \Phi, r_{t-1} \rangle$
(3)鉴定大的成分, 合并支撑集: $\Omega = \text{supp}(c_{2K})$, $\Lambda = \Omega \cup \text{supp}(x_{t-1})$
(4)通过最小二乘法的信号估计: $b _\Lambda = \Phi_\Lambda^\dagger \mathbf{y}$, $b _{\Lambda^c} = 0$
(5)剪枝获得下一次逼近: $x_t = b_K$
(6)更新残差: $r_t = \mathbf{y} - \Phi_{\Lambda_t} x_t$
(7)若满足停止标准, 则输出 $\mathbf{x} = x_t$, 若不满足, $t = t + 1$, 回到第(2)步.

关于此算法的迭代停止标准, 亦可以用一个固定的迭代次数, 实际上也有一些其它简单的停止标准.

4 信号重建的凸优化方法

解决 CS 问题的另一种受欢迎的方式是 l_1 模最小化模型:

$$\hat{\mathbf{x}} = \underset{\mathbf{x}}{\text{argmin}} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{s.t. } \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (6)$$

4.1 迭代硬阈值 (IHT_s)

迭代硬阈值算法能有效减少每次迭代中的误差, 在一个可达到的最佳误差估计的一个常数因子内被保证. 事实上, 这个算法需要一个固定的迭代数目, 仅仅依赖于信噪比率的一个形式的算法.

表 7

IHT _s 算法:
(1)初始‘解’ $x_0 = 0$, 初始残差 $r_0 = \mathbf{y}$, 计数器 $t = 0$.
(2)计算 $a_{t+1} = x_t + \Phi^T(\mathbf{y} - \Phi x_t)$
(3)选择最大的 K 个元: $x_{n+1} = H_K(a_{n+1})$
其中 H_s 是硬阈值算子, 保持数量大小的最大的 K 个元, 设置其它的元为零.
(4)满足迭代停止条件, 否则 $t = t + 1$, 返回第(2)步

注:这里迭代停止条件可选择具体的迭代次数.

4.2 布雷格曼 (Bregman) 迭代

布雷格曼迭代正则化由 Osher 等在图像处理的背景下提出, 可应用到压缩传感上. 对标准的 l_1 最小化问题: $\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}} \|\mathbf{x}\|_1 \mid \Phi \mathbf{x} = \mathbf{y}$, Bregman 迭代方法在一个有限的步骤内产生精确的解, 呈现数值结果.

表 8

Bregman 算法:
(1)初始: $x^0 = 0$, $p^0 = 0$, $b^0 = 0$
(2)迭代: $x^{k+1} \leftarrow \min_x D_J^k(x, x^k) + \frac{1}{2} \ \Phi \mathbf{x} - \mathbf{y}\ ^2$, $p^{k+1} \leftarrow p^k - \Phi^T(\Phi x^{k+1} - \mathbf{y})$

注: $D_J^k(u, v) = J(u) - J(v) - \langle p, u - v \rangle$, $J(x) = \mu \|\mathbf{x}\|_1$ 为 Bregman 距离, $p \in \partial J(v)$ 是可微函数 J 在点 v 的次梯度中的一个元, 这里迭代根据具体的误差要求确定迭代停止条件.

5 模拟实验

我们知道, 通常自然图像本身可能非稀疏, 但通过变换, 它们可在某种基下稀疏或可压缩. 所以基的选择会对整个 CS 理论恢复原始图像的质量有较大影响. 本文中, 为了在同等条件下客观地反映上述算法的重构性能, 我们采用本身稀疏的 0-1 随机信号来进行比较, 这也是文献中通常采用的方法.

本节中, 我们做了两种验证. 首先是对本身稀疏的 0-1 随机信号, 用表 2 至表 8 的 7 种算法进行重建性能

验证(见图 2);其次,由于重建中测量矩阵的随机性,通过多次实验来比较上述 7 种算法以及我们改进的 MBOOMP 算法的重建结果.比较的标准仍然是测量次数以及稀疏度和算法成功概率之间的关系,比较的结果如图 3 和 4.

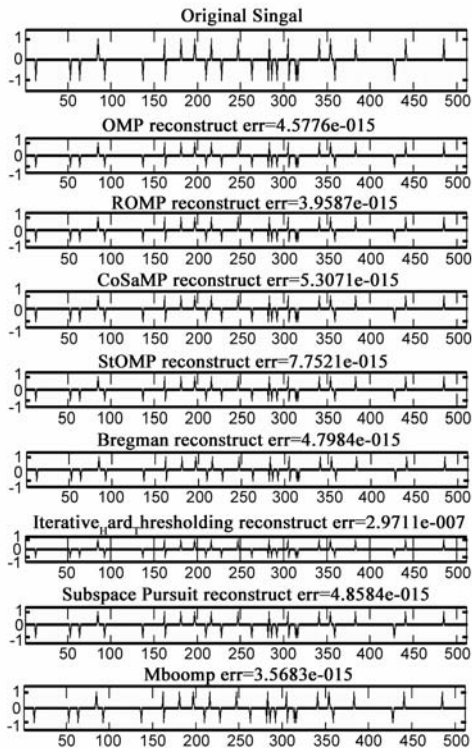


图2 $N=512, K=40, M=256$ 时, OMP, ROMP, CoSaMP, StOMP, Bregman, IHT, SP, MBOOMP算法的重建结果

首先,假设信号长度 $N=512$,稀疏度 $K=40$,测量次数 $M=256$,采用高斯随机测量矩阵 $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$: $\Phi(i, j) = \frac{1}{\sqrt{M}}\varphi_{ij}$,其中 $\varphi_{i,j} \sim N(0, 1)$,上述算法均高概率重建原始信号,如图 2 所示.

从图 2 可看出,在充分的测量次数下,各种算法均高概率恢复信号,为了进一步比较各种算法之间的重建效果和信号稀疏度以及测量次数之间的关系,我们再次采用本身稀疏的 0-1 随机信号,通过假设 $N=256, M=128$,改变信号稀疏度,以及假设 $N=256, K=30$,改变测量次数,分别来进行 500 次模拟实验,所得结果如图 3、图 4 所示.

从图 3 可看出,测量次数一定,随着信号稀疏度的增加,信号重建的概率逐渐减小,在信号非常稀疏的情况下,均高概率精确重建原始信号,但 OMP, ROMP 成功概率相对较小,而 CoSaMP, SP 算法则以相对较高概率精确重建原始信号,随着稀疏度的增加,CoSaMP 算法的渐近效果却远差于其它算法,而从图 4 我们也发现稀疏度一定,随着测量次数增多,信号重建的概率逐渐增

大,相比较而言,CoSaMP 以及 SP 算法精确恢复原始信号所需测量次数相对较少.从图 3 和图 4 中可发现,我们的 Mboomp 算法虽然沿用 OMP 算法每次迭代取一个元的机制,但在同等稀疏度或者测量次数条件下,信号重构效果明显好于 OMP 算法.

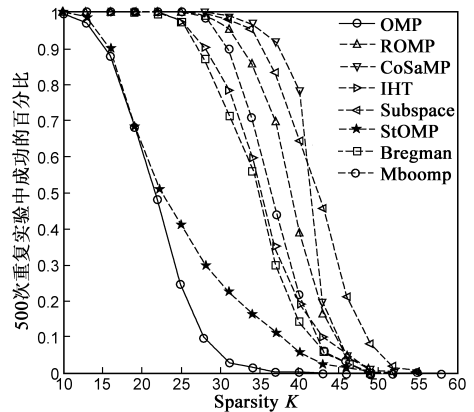


图3 $N=256, M=128$ 时,改变信号的稀疏度,OMP,ROMP,CoSaMP, StOMP,IHT,Bregman,SP,MBOOMP算法重建结果的比较

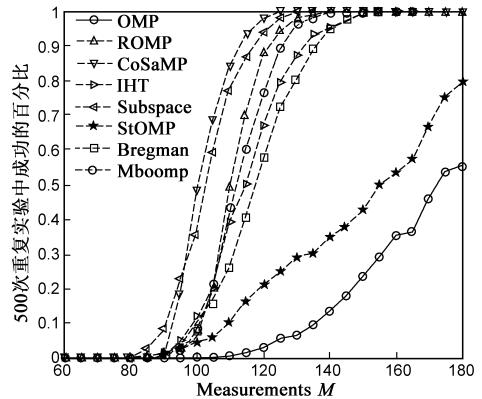


图4 $N=256, K=30$ 时,改变测量次数,OMP,ROMP,CoSaMP,IHT, StOMP,Bregman,SP, MBOOMP算法重建结果的比较

6 总结和展望

本文主要梳理了重构计算中主要的贪婪算法和凸优化算法,并通过模拟和比较实验进一步验证了各种算法的优缺点.我们认为,虽然此综述不是穷尽的,但是可以为有关研究和应用提供工具.我们进一步的方向是寻找更优 CS 测量矩阵类;发展更有效和低复杂度算法.与此同时,我们将高度重视有关应用.例如 Rice 大学的 Jason N Laska 以及密西根大学的 Tamer Ragheb 等人在文献[22]中提出压缩传感理论直接模拟-信息变为可能,给出模拟-信息转换的一个框架,并为原型 AIC 提出一个完全的晶体管级实现,此项目由 DARPA 的模拟-信息通过美国海军研究计划拨款(N66001-06-1 2011).美国威斯康星大学麦迪逊分校的 W U Bajwa, J Haupt, A M Sayeed 和 R Nowak 等人在文献[23~27]中依次提出分布式信源-通道匹配的通讯机制,被用来估计

和分析在融合中心所传感到的数据功率-失真-时延折中选择;提出用于非中心化数据压缩和预分布的新系统;提出分布式匹配源信道通信方案;提出分布式联合源-信源结构,用于远距离传感器现场数据的高效估计,并且能量,失真和延迟间的对应关系作为传感器节点的函数被分析.国内,北京航空航天大学的 Bing Du*, Liang Liu, Jun Zhang 2009 年在文献[28]中提出一种建立在分布式可压缩传感理论上的抽样数据压缩和重构的一种方法并用于无线传感网;厦门大学的 Di Guo, Xiaobo Qu, Mingbo Xiao, Yan Yao 2009 年在文献[29]中运用可压缩传感理论于实际传感器网络数据恢复问题;西安电子科技大学的石光明、刘丹化、高大化、刘哲、林杰、王良君、李树涛、魏丹等人在文献[30]、[31]中也介绍了 CS 理论及技术问题.

参考文献:

- [1] D Donoho. Compressed sensing[J]. IEEE Trans Inform Theory, 2006, 52(4): 1289 - 1306.
- [2] M A T Figueiredo, R D Nowak, S J Wright. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems[J]. IEEE J Selected Topics in Signal Processing: Special Issue on Convex Optimization Methods for Signal Processing, 2007, 1(4): 586 - 598.
- [3] I Daubechies, M Defrise, C De Mol. An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint [J]. Comm Pure Appl Math, 2004, 57(11): 1413 - 1457.
- [4] T Blumensath, M Davies. Iterative hard thresholding for compressed sensing[J]. Appl Comput Harmon Anal, 2009, 27(3): 265 - 274.
- [5] A C Gilbert, S Guha, P Indyk, S Muthukrishnan, M J Strauss. Near-optimal sparse Fourier representations via sampling[A]. Proc. of the 2002 ACM Symposium on Theory of Computing STOC[C]. Montreal, Quebec, Canada, 2002. 152 - 161.
- [6] E Candès, J Romberg, T Tao. Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information [J]. IEEE Trans Inform Theory, 2006, 52(2): 489 - 509.
- [7] 方红, 章权兵, 韦穗. 基于亚高斯随机投影的图像重建方法[J]. 计算机研究与发展, 2008, 45(8): 1402 - 1407.
Fang Hong, Zhang Quanbing, Wei Sui. A method of image reconstruction based on sub-Gaussian random projection[J]. Journal of Computer Research and Development, 2008, 45(8): 1402 - 1407. (in Chinese)
- [8] E Candès, T Tao. Error correction via linear programming [A]. Proc. of 46th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science FOCS [C]. Pittsburgh, Pennsylvania, USA, 2005. 295 - 308.
- [9] S Mallat, Z Zhang. Matching pursuit in a time-frequency dictionary[J]. IEEE Trans Signal Processing, 1993, 41(12): 3397 - 3415.
- [10] E J Candès, T Tao. Decoding by linear programming [J]. IEEE Trans Inform Theory, 2005, 51(12): 4203 - 4215.
- [11] S J Kim, K Koh, M Lustig, S Boyd, D Gorinevsky. A interior-point method for large-scale l_1 -regularized least-squares problems with applications in signal processing and statistics[J]. Journal of Machine Learning Research, 2007, 7(8): 1519 - 1555.
- [12] W Yin, S Osher, D Goldfarb, J Darbon. Bregman iterative algorithms for compressed sensing and related problems [J]. SIAMJ Imaging Sciences, 2008, 1(1): 143 - 168.
- [13] J Tropp, A Gilbert. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Trans. Inform. Theory, 2007, 53(12): 4655 - 4666.
- [14] 方红, 章权兵, 韦穗. 基于改进的后退型最优正交匹配追踪的图像重建方法[J]. 华南理工大学学报, 2008, 36(8): 23 - 27.
Fang Hong, Zhang Quanbing, Wei Sui. Image reconstruction based on improved backward optimized orthogonal matching pursuit algorithm [J]. Journal of South China University of Technology, 2008, 36(8): 23 - 27. (in Chinese)
- [15] D Needell, Vershynin R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit [J]. Found. Comput Math, 2009, 9(3): 317 - 334.
- [16] D L Donoho, I Drori, Y Tsaig, J L Starck. Sparse Solution of Underdetermined Linear Equations by Stagewise Orthogonal Matching Pursuit[R]. Stanford University, 2006.
- [17] D Needell, J A Tropp. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples [J]. Appl And Comp Harm. Anal, 2009, 26(3): 301 - 321.
- [18] W Dai, O Milenkovic. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction [J]. IEEE Trans Inform Theory, 2009, 55(5): 2230 - 2249.
- [19] A Gilbert, M Strauss, J Tropp, R Vershynin. Algorithmic linear dimension reduction in the l_1 norm for sparse vectors [A]. Proc. 44th Annual Allerton Conf Communication, Control, and Computing [C]. Allerton, USA, 2006, 9.
- [20] A Gilbert, M Strauss, J Tropp, R Vershynin. One sketch for all: Fast algorithms for compressed sensing [A]. Proc. 39th ACM Symp. Theory of Computing [C]. San Diego, USA, 2007. 7. 237 - 246.
- [21] M Iwen. A deterministic sub-linear time sparse Fourier algorithm via non-adaptive compressed sensing methods [DB/OL]. <http://dsp.rice.edu/cs>, 2007.
- [22] Joel A Tropp, Marco F Duarte, Justin K Romberg, Richard G Baraniuk. Beyond nyquist: Efficient sampling of sparse bandlimited signals [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(1): 520 - 544.

- [23] W U Bajwa, J Haupt, A M Sayeed, R Nowak. Compressive wireless sensing [A]. Proc. IPSN'06 [C]. Nashville, TN, USA, 2006.4. 134 - 142.
- [24] M Rabbat, J Haupt, A Singh, R Nowak. Decentralized compression and predistribution via randomized gossiping [A]. Proc. IPSN'06 [C]. Nashville, TN, USA, 2006.4. 51 - 59.
- [25] W U Bajwa, J Haupt, A M Sayeed, R Nowak. A universal matched source-channel communication scheme for wireless sensor ensembles [A]. Proc. ICASSP'06 [C]. Toulouse, France, 2006.5. 1153 - 1156.
- [26] Waheed U Bajwa, Jarvis D Haupt, Akbar M Sayeed, Robert D Nowak. Joint source-channel communication for distributed estimation in sensor networks [J]. IEEE Trans Inform Theory, 2007, 53(10): 3629 - 3653.
- [27] Jarvis Haupt, Waheed U Bajwa, Michael Rabbat, Robert Nowak. Compressed sensing for networkedData [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 92 - 101.
- [28] Bing Du, Liang Liu, Jun Zhang. Multisensor Information Compression and Reconstruction [DB/OL]. <http://dsp.rice.edu/cs>, 2009.
- [29] Di Guo, Xiaobo Qu, Mingbo Xiao, Yan Yao. Comparative analysis on transform and reconstruction of compressed sensing in sensor networks [A]. CMC '09. WRI International Conference [C]. IEEE Computer Society Washington, DC, USA, 2009. 441 - 445.
- [30] 石光明, 刘丹化, 高大化, 刘哲, 林杰, 王良君. 压缩感知理论及其研究发展 [J], 电子学报, 2009, 37(5): 1070 - 1081. Shi Guangming, Liu Danhua, Gao Dahua, Liu Zhe, Lin jie, Wang Liangjun. Advance in theory and application of compressed sensing [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(5): 1070 - 1081. (in Chinese)
- [31] 李树涛, 魏丹. 压缩传感综述 [J]. 自动化学报, 2009, 35(11): 1 - 7.

Li Shutao, Wei Dan. A survey on compressive sensing [J]. Acta Automatica Sinica, 2009, 35(11): 1 - 7. (in Chinese)

作者简介:



杨海蓉 女, 1981 年出生于安徽黄山, 讲师, 现为安徽大学在读博士研究生、合肥师范学院教师. 研究方向: 信号与信息处理、图像处理. E-mail: murong81@163.com



张成 男, 1984 年出生于安徽庐江, 现为安徽大学在读博士研究生. 研究方向: 信号与信息处理、相位检索. E-mail: question1996@163.com

丁大为 男, 1977 年出生于安徽芜湖, 副教授, 现为安徽大学电子学院教师. 主要研究方向为通信信号处理、网络通信、非线性动力学、混沌及分岔控制等.

韦穗 女, 1946 年出生于广西桂林, 壮族, 教授, 博导, 现任中国图像图形学会副理事长、安徽大学计算智能与信号处理教育部重点实验室主任、安徽省现代成像与显示技术重点实验室副主任、中国科学院无线传感网与通信重点实验室学术委员会副主任、四川大学视觉合成图形图像技术国防重点学科实验室学术委员、安徽省仿生感知与先进机器人技术重点实验室学术委员会委员、合肥工业大学特种显示技术教育部重点实验室学术委员会委员、《中国图象图形学报》、《模式识别与人工智能》等杂志编委, 长期从事图像处理与三维全息显示的研究工作.